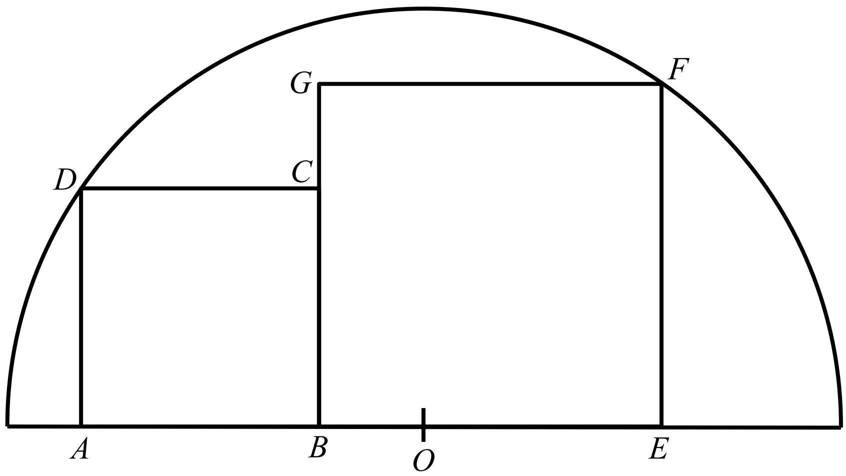
Hong Kong Mathematics Olympiad (2018/19)
Heats (Group)
香港數學競賽 (2018/19)
初賽項目(團體)

除特別指明外，所有答案須以數字的真確值表達，並化至最簡。不接受近似值。
Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form. No approximation is accepted.

1. 對所有正實數 x，定義 $f(x)=\log_{2019} x^{2020}$。若 $D=f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(\sqrt{673}\right)$，求 D 的值。

   For all positive real numbers x, define $f(x)=\log_{2019} x^{2020}$. If $D=f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(\sqrt{673}\right)$, find the value of D.

2. 圖一所示為一個半徑為 5 cm 且圓心位於 O 的半圓。A、B 和 E 為直徑上的點而 D 和 F 則為圓周上的點。設 S cm^2 為兩個正方形 $ABCD$ 和 $BEFG$ 面積之和。求 S 的值。
   Figure 1 shows a semi-circle with radius 5 cm and centre at O. A, B and E are points on the diameter. D and F are points on the circumference. Let S cm^2 be the total area of the two squares $ABCD$ and $BEFG$. Find the value of S.

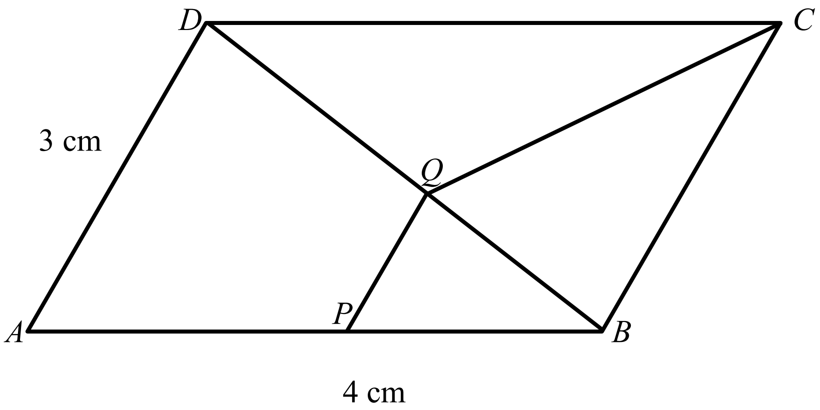


圖一
Figure 1

3. 若從一個正 9 邊形的 9 個頂點中選 3 個頂點組成一個等腰三角形，共可組成多少個等腰三角形？
   If three vertices are chosen from the nine vertices of a regular nonagon to form an isosceles triangle, how many such isosceles triangles are there?

4. 在圖二中，$ABCD$ 為一個平行四邊形，其中 $AB = 4$ cm、$AD = 3$ cm 及 $\sin A = \frac{2}{3}$。 P 和 Q 分別是 AB 和 BD 上的點使 $PQ // AD$ 且四邊形 $PBCQ$ 的面積為 3 cm^2。設 q cm 為 AP 的長度。求 q 的值。

In Figure 2, $ABCD$ is a parallelogram, where $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm and $\sin A = \frac{2}{3}$. P and Q are points on AB and BD respectively such that $PQ // AD$ and the area of the quadrilateral $PBCQ$ is 3 cm^2 . Let q cm be the length of AP. Find the value of q .



圖二

Figure 2

5. 已知 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$，其中 $x \neq 0$。設 y 為滿足方程 $f(x) = 1$ 的 x 的最大值。 求 y。

Given that $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, where $x \neq 0$. Let y be the maximum value of x that satisfies the equation $f(x) = 1$. Find y .

6. 設 a_k 為多項式 $(2x-2)^3(2x+2)^3(2x+1)^3$ 中 x^k 的係數。若 $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ ，求 Q 的值。

Let a_k be the coefficient of x^k in the polynomial $(2x-2)^3(2x+2)^3(2x+1)^3$. If $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$, find the value of Q .

7. 設 $f(x) = -6x^2 + 4x\cos\theta + \sin\theta$，其中 $0° \leq \theta \leq 360°$。已知對所有實數 x，$f(x) \leq 0$。若 θ 的最大值與最小值之差為 $d°$，求 d 。

Let $f(x) = -6x^2 + 4x\cos\theta + \sin\theta$, where $0° \leq \theta \leq 360°$. It is given that $f(x) \leq 0$ for all real numbers x . If $d°$ is the difference between the greatest and the least values of θ, find d .

8. 設 $\{a_n\}$ 為一個正實數序列使當 $n>1$ 時，$a_n = a_{n-1}a_{n+1} - 1$。已知 2018 在序列中及 $a_2 = 2019$。若 s 為 a_1 的所有可取值的數目，求 s。

Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive real numbers such that $a_n = a_{n-1}a_{n+1} - 1$ for $n > 1$. It is given that 2018 is in the sequence and $a_2 = 2019$. If s is the number of all possible values of a_1, find s.

9. 有多少對正整數 x、y 可滿足 $xy = 6\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$？
How many pairs of positive integers x, y are there satisfying $xy = 6\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$?

10. D 是等邊三角形 ABC 內的一點使 $AD = BD = 5\sqrt{2}$ 及 $CD = 10$。設 S 為 ΔABC 的面積。求 S 的值。
D is a point inside the equilateral triangle ABC such that $AD = BD = 5\sqrt{2}$ and $CD = 10$. Let S be the area of ΔABC. Find the value of S.

完
END